Egzamin zerowy z Analizy Matematycznej I.2 2022/23
15 czerwca 2023, 14.15-17.15

Za rozwiązanie każdego z zadań 1-5 można uzyskać 10 punktów. Należy wybrać dowolne cztery zadania z podanego zestawu.
Rozwiązanie każdego zadania należy oddać **na osobnej kartce, podpisanej** *swoim imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu, a także nazwiskiem prowadzącego ćwiczenia lub numerem grupy ćwiczeniowej.*
Rozwiązania **należy szczegółowo uzasadnić,** *powołując się na fakty znane z wykładu bądź z ćwiczeń.*

Zadanie 1. Wykaż, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{x^5 + n^5}$$

jest dobrze określona oraz jest klasy C^1 na przedziale $[0, \infty)$.

Zadanie 2. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

$\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

Zadanie 3. Niech funkcja f będzie określona jako suma szeregu potęgowego $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, gdzie

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy } 2 \mid n, \\ -3 & \text{gdy } 6 \mid (n+1), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(a) Wyznacz promień zbieżności oraz przedział zbieżności tego szeregu i oblicz jego sumę (wartość funkcji f) w punktach przedziału zbieżności;

(b) Wyznacz funkcję F taką, że $F'(x) = f(x)$;

(c) Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, gdzie

$$c_n \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{gdy } 2 \nmid n \\ -\frac{3}{n} & \text{gdy } 6 \mid n \\ 0 & \text{gdy } 2 \mid n \text{ oraz } 3 \nmid n \end{cases}$$

albo uzasadnij, że ten szereg jest rozbieżny.

Zadanie 4. Niech

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt.$$

(a) Uzasadnij, że na każdym z przedziałów $(0, 1)$ oraz $(1, \infty)$ funkcja f jest ciagła;

(b) Wykaż. że f jest rosnąca i wypukła na każdym z przedziałów $(0, 1)$ oraz $(1, \infty)$;

(b) Wyznacz granicę $\lim_{x\to 1} f(x)$ lub uzasadnij, że ona nie istnieje.

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x^2 - \pi^2}}\, dx.$$